Modélisation d'une variable d'écoute

Guillaume Chauvet [*]

14 novembre 2018

Soit X_1 la variable donnant l'écoute au temps 1. En notant m_1 la valeur moyenne de l'écoute au temps 1, X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre m_1. On a donc

$$E(X_1) = m_1 \quad \text{et} \quad V(X_1) = m_1(1-m_1). \tag{1}$$

Soit X_2 la variable donnant l'écoute au temps 2. En notant m_2 la valeur moyenne de l'écoute au temps 2, X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre m_2. On a donc

$$E(X_2) = m_2 \quad \text{et} \quad V(X_2) = m_2(1-m_2). \tag{2}$$

Soit P la matrice de transition entre les deux temps, définie par

$$P = \left(\begin{array}{cc} Pr(X_2=1|X_1=1) & Pr(X_2=0|X_1=1) \\ Pr(X_2=1|X_1=0) & Pr(X_2=0|X_1=0) \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cc} p & 1-p \\ 1-q & q \end{array} \right) \tag{3}$$

Notons que conditionnellement à $X_1 = 1$, X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre p et conditionnellement à $X_1 = 0$, X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-q$. On en déduit que

$$X_2|X_1 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } (p+q-1)X_1 + (1-q). \tag{4}$$

On souhaite choisir p et q de façon à contrôler la valeur moyenne m_2 au temps 2, ainsi que la corrélation ρ entre les deux temps, définie par

$$\rho \equiv Corr(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)}\sqrt{V(X_2)}}. \tag{5}$$

On obtient une première équation en utilisant $E(X_2) = EE(X_2|X_1)$ et l'équation (4). On obtient

$$(p+q-1)m_1 + (1-q) \;\; = \;\; m_2. \tag{6}$$

*ENSAI/IRMAR, Campus de Ker Lann, 35170 Bruz, France. E-mail: chauvet@ensai.fr

D'autre part, en utilisant à nouveau l'équation (4), on a

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= Cov(X_1, E(X_2|X_1)) && (7) \\ &= Cov(X_1, (p+q-1)X_1 + (1-q)) = (p+q-1)V(X_1). \end{aligned}$$

A l'aide des équations (1), (2) et (5), on obtient la seconde équation

$$(p+q-1)\sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{m_2(1-m_2)}} = \rho. \qquad (8)$$

En réorganisant les équations (6) et (8), on obtient les formes explicites

$$q = (1-m_2) + \rho\sqrt{\frac{m_1 m_2(1-m_2)}{1-m_1}} \quad \text{et} \quad p = \frac{m_2 - (1-q)(1-m_1)}{m_1}. \qquad (9)$$